

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ
ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022-23

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΕΤΑΙ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΙΑΣ (1) ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
4. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα κλπ.
5. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
6. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
7. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.

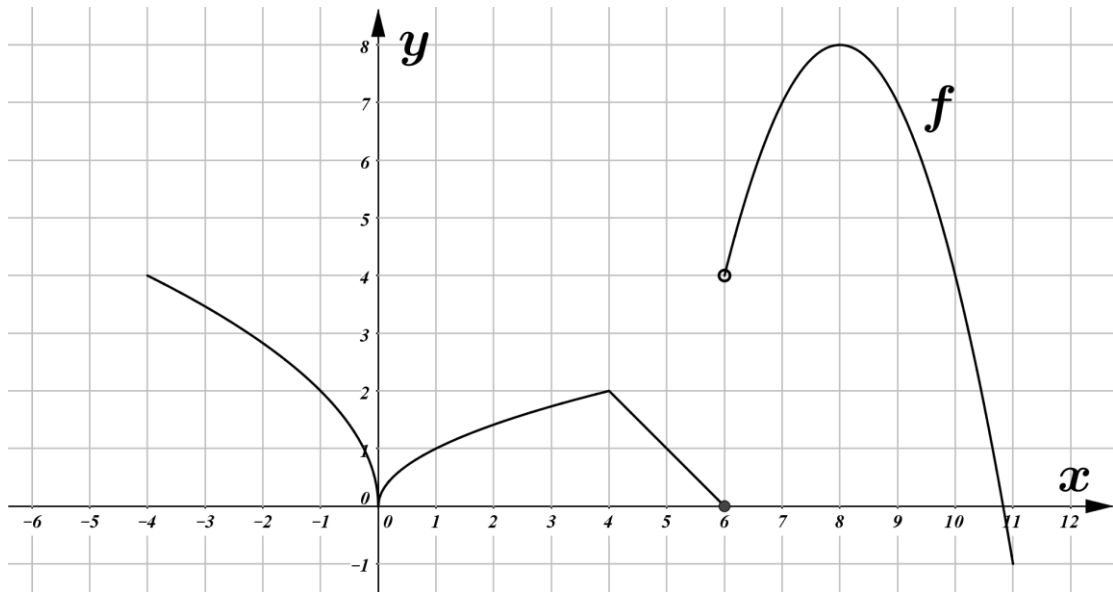
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

A1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^x - 3x + \sin x - 2\pi - \sqrt{x}$, $x > 0$

β) $g(x) = x^4 \eta \mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

A2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις:

- i) Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(4,2)$.
- ii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 6$.
- iii) $f'(-1) < 0$
- iv) $f'(8) = 0$
- v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

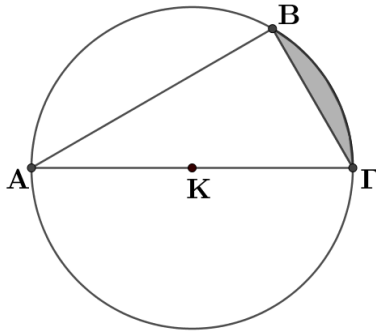
A3. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\log(2x + 7) - 1 = \log(1 - x)$$

A4. Αν $y = \frac{\ln(2x)}{x^2}$, $x > 0$, να δείξετε ότι: $x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x^3 \frac{dy}{dx} + 4x^2y = 0$

A5. Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, R) . Αν $AB = \lambda_3$, να βρείτε συναρτήσει του R :

- α) Το μήκος του τόξου $B\Gamma$. (μον. 3)
β) Την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$. (μον. 2)
γ) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. (μον. 5)



A6. Δίνεται καμπύλη με εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 27$. Να βρείτε:

- α) Τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια. (μον. 8)
β) Τις εξισώσεις των οριζόντιων αυτών εφαπτομένων. (μον. 2)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.

Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με δέκα 10 μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 με δεκαπέντε (15) μονάδες.

B1. Ένα πετρελαιοφόρο πλοίο, μετά από ατύχημα, σχημάτισε στην επιφάνεια της θάλασσας πετρελαιοκηλίδα κυκλικού σχήματος με ακτίνα R (σε km). Η ακτίνα (R) είναι συνάρτηση, η οποία μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο t (σε μέρες) και ορίζεται από τον τύπο $R(t) = t^2 + 2t$, $t \geq 0$. Θεωρούμε ότι το σχήμα της πετρελαιοκηλίδας παραμένει κυκλικό και το κέντρο της είναι σταθερό στο σημείο του ατυχήματος. Να βρείτε:

- α) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της πετρελαιοκηλίδας στο τέλος της 4^{ης} μέρας μετά το ατύχημα. (μον. 5)
- β) Σε πόσες μέρες, μετά το ατύχημα, θα φτάσει η πετρελαιοκηλίδα στην ακτή, αν το κέντρο της απέχει $168 km$ από την ακτή. (μον. 3)
- γ) Να βρείτε μετά από πόσες μέρες ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της περιφέρειας της πετρελαιοκηλίδας θα είναι $44\pi km/μέρα$. (μον. 2)

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 1 \\ \sqrt{x} + \beta, & x > 1 \end{cases}$$

- α) Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. (μον. 8)
- β) Αν $a = \frac{1}{4}$ και $\beta = -\frac{3}{4}$, να βρείτε:
- i) Την παράγωγο συνάρτηση, $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (μον. 3)
- ii) Την εξίσωση της κάθετης ευθείας, της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. (μον. 4)

B3. α) Να βρείτε την ορθή απάντηση στα πιο κάτω ερωτήματα. Υπάρχει μόνο μία ορθή απάντηση σε κάθε ερώτημα: (μον. 3)

i) Αν $\ln x = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε το x είναι ίσο με:

- A) $\frac{1}{\kappa}$ B) $e^{-\kappa}$ Γ) e Δ) e^{κ} Ε) κανένα από τα προηγούμενα

ii) Αν $x > 0$, τότε $\log \sqrt{x}$ ισούται με:

- A) $\sqrt{\log x}$ B) $\log x^2$ Γ) $\frac{1}{2} \log \sqrt{x}$ Δ) $\frac{1}{2} \log x$ Ε) x^2

iii) Αν $\log 2 = \alpha$ και $\log 5 = \beta$, τότε $\log 20$ είναι ίσο με:

- A) $\beta - 2\alpha$ B) $2\alpha - \beta$ Γ) $\alpha + \beta$ Δ) $2\alpha + \beta$ Ε) $2\alpha + 2\beta$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ορίζεται εκθετική συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (2a^2 - 5a + 3)^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (μον. 4)

γ) Αν στο προηγούμενο ερώτημα (β) ισχύει ότι $a = 0$:

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \frac{15}{f(x)} - 8 = 0$. (μον. 4)

ii) Αν επιπλέον η f αντιστρέφεται, να γράψετε τους τύπους και τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$, $f(-x)$ και $f^{-1}(x)$. Στη συνέχεια, να τις παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων. (μον. 4)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$$